MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 3 (nepovinný) :

Limita posloupnosti:

1. Dokažte užitím definice limity posloupnosti (a důkaz podrobně napište) :

   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n = 0$;

   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

   c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a \in (0,\infty)$.

2. Dokažte, že platí (důkaz opět sepište podrobně) :

   a) $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ pro $q \in (-1,1)$;

   b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n.b_n = 0$.

   (a odtud lze pak jednoduše určit např. limitu $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n$).

   c) $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ a $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$ ($a \in R$).

3. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení (a dokažte, že platí nebo opravte tak, aby tvrzení platilo) :

   a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$, ($a \in R$);

   b) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$, ($a \in R$).